SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

SOLUZIONI NON NEGATIVE PER EQUAZIONI SEMILINEARI ELLITTICHE IN APERTI NON LIMITATI

12 MARZO 1987

1. INTRODUZIONE

Il problema semilineare

$$(1.1)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}, \quad \Omega \text{ aperto di } R^n;$$

è il prototipo di una classe di problemi al contorno ellittici non lineari che si presentano in numerose applicazioni. Varie questioni ad esso relative (esistenza, regolarità, molteplicità e positività delle soluzioni; esistenza di autovalori e di autofunzioni; biforcazione) sono state intensamente studiate nel caso di Ω *limitato* . Ampie rassegne dei metodi e dei risultati ottenuti al riguardo si possono trovare nelle note di Amann [1], Schmitt [21], Nirenberg [19], P.L. Lions [17].

Al contrario, se Ω è un aperto non limitato, i teoremi di esistenza per il problema (1.1), noti sino ad ora, sono molto pochi. Solo nel caso di $\Omega = R^n$ il problema dell'esistenza di soluzioni positive e nulle all'infinito dell'equazione

$$\Delta u + f(u) = 0$$

si può ritenere risolto in modo quasi completo, dopo i lavori di Strauss [22], Coleman-Glazer e Martin [8], Berestycki-PL. Lions [4], Atkinson-Peletier [3].

Parte dei risultati contenuti in questi lavori si estendono ad aperti $\Omega \neq R^n$ con forti proprietà di simmetria. In ogni caso la geometria di Ω sembra avere un ruolo essenziale per l'esistenza di soluzioni non banali, positive o non, del problema (1.1).

2. ALCUNI TEOREMI DI NON ESISTENZA

In questo paragrafo riportiamo alcuni risultati dovuti sostanzialmente a Esteban e P.L. Lions [10].

Indichiamo con Ω un aperto connesso di R^n, $n\geq 2$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe $C^{2+\alpha}$, $0<\alpha<1$. Con $\nu(x)$ indichiamo la normale esterna ad Ω nel punto $x\in\partial\Omega$.

Supponiamo f localmente lipschitziana su R con $f(0) = 0$ e poniamo

$$F(t) = \int_0^t f(\delta)d\delta$$

Sia ora u una soluzione classica di (1.1) e sia $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un qualunque vettore di R^n.

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione

$$-\Delta u = f(u),$$

per $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha_i)\partial_i u$, integrando l'identità ottenuta su $\Omega_R = \Omega\cap B(0,R)$, integrando successivamente per parti e ricordando che, essendo $u=0$ su $\partial\Omega$, è $\nabla u(x) = \pm|\nabla u(x)|\nu(x)$ per ogni $x\in\partial\Omega$, si ottiene

$$\int_{(\partial\Omega)\cap B(0,R)} (x-\alpha)\cdot\nu(x)\,\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right|^2 d\,H_{n-1}(x) =$$

$$= -(n-2)\int_{\Omega_R}|\nabla u|^2dx + 2n\int_{\Omega_R}F(u)dx - \int_{\Omega\cap\partial B(0,R)}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-\alpha_i)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{x_i}{R}\,dH_{n-1}(x).$$

Da questa identità, se supponiamo anche

$$\nabla u \in L^2(\Omega) \quad e \quad F(u) \in L^1(\Omega),$$

passando al limite per una opportuna successione $R_k \to +\infty$, si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} (x-\alpha)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(\nu)\right|^2 dH_{n-1}(x) =$$

$$= (2-n)\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + 2n\int_{\Omega} F(u)dx$$

(identità di Pohozaev). Questo prova, in particolare, che

$$\int_{\partial\Omega} (x-\alpha)\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right|^2 dH_{n-1}(x) = M$$

è indipendente da α.

Supponiamo ora che Ω verifichi la seguente ipotesi:

$$\begin{cases} \text{esiste una successione } (\alpha^{(p)}) \text{ in } R^n: \\ (x-\alpha^{(p)})\cdot\nu(x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \\ \liminf_{p\to+\infty}(x-\alpha^{(p)})\cdot\nu(x) = +\infty,\ \forall x \in \Gamma \end{cases}$$

essendo Γ un sottoinsieme relativamente aperto di $\partial\Omega$. Allora, poiché

$$M = \liminf_{p\to+\infty} \int_{\partial\Omega} (x-\alpha^{(p)})\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right|^2 dH_{n-1}(x)$$

$$\geq \int_{\Gamma} \liminf_{p\to+\infty} (x-\alpha^{(p)})\cdot\nu(x)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(\nu)\right|^2 dH_{n-1}(x).$$

dovrà essere $\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) = 0\ \forall x \in \Gamma$. Se $\Gamma \supseteq (\partial\Omega)\cap B(x_0,\rho)$, con $x_0 \in \partial\Omega$, posto

$$\bar{u} = \begin{cases} u, & \text{in } \Omega\cap B(x_0,\rho) \\ 0, & \text{in } (R^n\setminus\Omega)\cap B(x_0,\rho) \end{cases},$$

si verifica subito che $\bar{u}$ è soluzione debole dell'equazione

$$\Delta u + c(x)u = 0 \qquad (c(x) = \frac{f(u(x))}{u(x)})$$

con $c \in L^{\infty}_{loc}(B(x_0,\rho))$.

Allora, per il Teorema di prolungamento unico (Cfr. ad esempio [12], Teorema 4.2), $\bar{u} \equiv 0$ in $B(x_0,\rho)$ e, quindi, $u \equiv 0$ in $\Omega \cap B(x_0,\rho)$. Questo implica $u \equiv 0$ in Ω. Infatti, se per assurdo fosse

$$\Omega(u) \equiv \mathrm{int}\{x \in \Omega / u(x)=0\} \neq \Omega,$$

esisterebbe una sfera $B \subseteq \Omega(u)$ tale che

$$\partial B \cap \partial\Omega(u) = \{y_0\} \quad , \quad y_0 \in \Omega \quad ;$$

un ragionamento analogo al precedente porterebbe, a questo punto, a riconoscere che u è nulla in un intorno completo di y_0, contraddicendo la massimalità di $\Omega(u)$.

In definitiva: *se* Ω *verifica* (G.1) *il problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \\ \nabla u \in L^2(\Omega) \ , \ F(u) \in L_1(\Omega) \end{cases}$$

ha solo la soluzione $u=0$.

E' immediato verificare che aperti del tipo seguente:

$$\{(x',x_n) \in R^{n-1} \times R \ / \ x' \in \Omega_1 \ , \ x_n < \phi(x')\},$$

con Ω_1 aperto stellato e limitato di R^{n-1} e $\phi \in C^2(\bar{\Omega}_1)$, verificano (G.1).

Diamo ora un teorema di non esistenza di soluzioni positive utilizzando il metodo degli *iperpiani mobili* di Alexandrov-Serrin, il *principio di massimo forte* di Hopf e alcuni lemmi di Gidas-Ni-Nirenberg.

Sia Ω un aperto tale che

$$(G.2) \qquad \begin{cases} \exists \gamma \in R^n \setminus \{0\} : \Omega \subseteq \{x \in R^n / \gamma \cdot x \leq 0\} \\ \nu(x) \cdot \gamma > 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Allora il problema

$$(2.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \\ u(x) > 0 \quad \text{in } \Omega \ , \quad u(x) \to 0 \quad \text{per } x \to \infty \end{cases}$$

non ha soluzioni $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Ragioniamo per assurdo. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una soluzione di (2.1). Per ogni $\lambda \in R$ poniamo $\Omega_\lambda = \{x \in \Omega / x \cdot \gamma > \lambda\}$. Utilizzando il principio di massimo di Hopf si prova che esiste un $\lambda \in R$ tale che

$$(2.2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0 \ , \ u(x) \leq u(x^\lambda) \quad \forall x \in \Omega_\lambda$$

(Cfr. ad esempio [15], Lemma 1.2). Se l'estremo superiore dell'insieme dei λ per i quali vale (2.2) è $+\infty$ allora $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0 \ \forall x \in \Omega$ e questo contraddice le condizioni al "bordo" $u=0$ su $\partial\Omega$, $u(x) \to 0$ per $x \to \infty$.

D'altra parte, si ottiene una contraddizione anche supponendo che l'estremo superiore dei λ in (2.2) sia $\lambda_0 \in R$.

Infatti, indichiamo con $\Omega^*_{\lambda_0}$ il simmetrico di Ω_{λ_0} rispetto all'iperpiano $x \cdot \gamma = \lambda_0$. Osserviamo che, per (G.2), $\Omega^*_{\lambda_0} \subseteq \Omega$. Allora

$$W(x) = u(x^\lambda)-u(x) \leqq 0 \quad \text{su } \partial\Omega^*_{\lambda_0}$$

$$\Delta W + cw = 0 \quad \text{in } \Omega^*_{\lambda_0}$$

$(c(x) = (f(u(x)) - f(u(x^\lambda)))/(u(x)-u(x^\lambda)))$.

D'altra parte $w=0$ su $\partial\Omega \cap \{x\cdot\gamma=\lambda_0\}$. Ancora per il principio di massimo di Hopf deve quindi essere $\frac{\partial W}{\partial\gamma} > 0$ in $\partial\Omega^* \cap \{x\cdot\gamma = \lambda_0\}$. Questo contraddice la massimalità di λ_0 poiché $\frac{\partial u}{\partial\gamma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\gamma}$.

3. TEOREMI DI ESISTENZA IN APERTI A SIMMETRIA CILINDRICA

Come abbiamo ricordato nel § 1 il problema

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} \Delta u = -f(u) & \text{in } R^n \\ u \geqq 0, \ u \not\equiv 0, \ u(x) \to o & \text{per } x \to \infty \end{cases}$$

è stato risolto in modo quasi completo. Per studiare (3.1) sono state usate essenzialmente due tecniche:

(i) ricerca di soluzioni radiali $u(x) = u(|x|)$ di (3.1) come soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria

$$\text{(3.2)} \qquad u'' + \frac{n-1}{r} u' + f(u) = 0.$$

In questo contesto si cercano soluzioni $u \in C^2([0,+\infty[)$ di (3.2) tali che $u'(o) = 0$, $u(o) > 0$, $u(r) \to \infty$ per $r \to \infty$.

(ii) ricerca di soluzioni di (3.1) come punti critici del funzionale (su $H^1(R^n)$)

$$S(u) = \int_{R^n} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{R^n} F(u)dx.$$

Ovviamente il metodo (i) può essere usato per lo studio di (1.1) soltanto quando l'aperto Ω è del tipo seguente:

$$\Omega = \{x \quad R^n / \; |x| > R\} \; , \quad R>0.$$

(teoremi di esistenza in questa direzione sono stati ottenuti da Esteban e P.L. Lions in [10]; si veda anche [13]).

D'altra parte, anche le tecniche che si usano nel metodo (ii) non sembrano utilizzabili, in generale, se Ω non ha qualche proprietà di simmetria. Infatti, nella ricerca di punti critici del funzionale S la principale difficoltà che si incontra è dovuta alla non compattezza della immersione di $H'(R^n)$ in $L^p(R^n)$, $2<p<\frac{2n}{n-2}$. Questa difficoltà viene di solito superata cercando i punti critici di S in $H_r'(R^n)$, il sottospazio di $H^1(R^n)$ delle funzioni radialmente simmetriche rispetto all'origine. Grazie infatti alla disuguaglianza

$$|u(x)| \leq c_n \, \|u\|_{L^2}^{1/2} \, \|\nabla u\|_{L^2}^{1/2} \, |x|^{-(n-1)/2} ,$$

valide per ogni $u \in H_r^1 (R^n)$ (si veda ad es. [16], Lemma 1.1) è facile mostrare che l'immersione

$$H_r^1 \hookrightarrow L^p$$

è compatta per ogni $p \in]2, \frac{2n}{n-2}[$.

Di conseguenza, se f verifica "naturali" ipotesi di comportamento asintotico, S/H_r^1 verifica la condizione di Palais-Smale e si possono determinare punti critici di S su H_r^1 con i consueti metodi variazionali di tipo minimax (Lemma del passo di montagna, minimizzazione vincolata).

Questi procedimenti possono essere utilizzati anche nel caso di aperti diversi da R^n purché essi abbiano alcune proprietà di simmetria cilindrica.

P.L. Lions ed Esteban ([16], [11]) hanno studiato il problema della compattezza della immersione di Sobolev per sottospazi di $H^1_0(\Omega)$ di funzioni a simmetria sferica rispetto ad un gruppo di variabili.

A titolo di esempio riportiamo il seguente Teorema ([11], Teorema 1):

Sia O un *aperto limitato* di R^m e sia $p \geq 2$. Poniamo $\Omega = O \times R^p$ e definiamo

$$H^1_{0,s}(\Omega)$$

come la chiusura in $H'_0(\Omega)$ dell'insieme delle funzioni $u(x,y) = v(x,|y|)$, con $v \in C^\infty_0(O \times R)$, $\partial_t v(x,o) = 0$ per ogni $x \in O$. Allora, se $p \geq 2$ e $q \in]2, \frac{2n}{n-2}[$, $n = m+p$, allora $H^1_{0,s}(\Omega)$ è immenso compattamente in $L^q(\Omega)$.

Come applicazione di questo risultato Esteban [9] ha provato il seguente:

<u>Teorema 3.1.</u> Sia Ω come nelle righe precedenti. Il problema

$$(3.3) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega \\ u=0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha una soluzione $u \in H^1(\Omega) \cap C^{1+\alpha}_{loc}(\bar{\Omega})$, $u>0$ in Ω se f verifica le ipotesi seguenti:

(H.1) $\quad f(t) = \nu t+g(t)$, $\nu < \lambda_1$ = primo autovalore di $-\Delta$ relativo ad O.

(H.2) $g(t) = o(t)$ per $t \to 0$, $g(t) = O(t^{\ell})$ per $t \to +\infty$ con $2 < \ell < \frac{n+2}{n-2}$

(H.3) esiste $\theta < \frac{1}{2}$ tale che

$$G(t) \equiv \int_0^t g(s)ds \leq \theta t g(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Schema della prova.

A. Per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ risulta

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

([9], Lemma 3; si veda anche [7], Lemma 1)

B. Si modifica g ponendola uguale a 0 per $t \leq 0$. Per il principio di massimo le soluzioni relative ad una g siffatta sono >0 in Ω e verificano, di conseguenza, l'equazione di partenza.

C. Il funzionale

$$S(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\nu}{2} \int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega G(u)$$

è di classe C^1 su $H^1_{0,s}(\Omega)$ e i suoi punti critici sono le soluzioni deboli di (3.3).

D. S verifica la condizione di Palais-Smale. Questo segue in modo standard dal teorema di immersione compatto richiamato di sopra, dalla disuguaglianza

$$(\frac{1}{2} - \theta) \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 - \nu \int_\Omega |u|^2 \right) \leq S(u) - \theta dS(u)\,(u)$$

(questa segue dalle ipotesi (H.3), dalla A e dall'ipotesi $\nu < \lambda_1$).

E. Dalla (H.2) si ricava

$$\int_\Omega G(u) = O\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 \right) \quad \text{per } u \to 0$$

e quindi, per A,

$$\exists \rho > 0, \ m_1 > 0 \ ; \ S(u) \geq \alpha \text{ se } \|u\|_{H^1} = \rho$$

Inoltre, poiché per (H.3)

$$t \to \int_\Omega G(tu)$$

ha crescenza superquadratica, il funzionale S non è inferiormente limitato ed esiste $u_0 \in H^1_{0,s}(R^n)$, $\|u_0\|_{H^1_0} > \rho$, tale che $S(u_0) \leq 0$.

Il teorema del passo di montagna di Ambrosetti e Rabinowitz, permette ora di concludere che S ha un punto critico $u \neq 0$.

La regolarità di u segue poi da classici risultati di regolarizzazione ellittica.

Osservazione. Le proprietà geometriche di Ω, nella precedente dimostrazione, sono intervenute soltanto al passo A e al passo D. In A l'ipotesi $\nu < \lambda_1$ serve a garantire l'equivalenza della norma di $H^1(\Omega)$ con

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \nu \int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Ovviamente, questa equivalenza si può ottenere supponendo semplicemente $\nu < 0$.

In D la simmetria di Ω è servita per assicurare l'immersione compatta di $H^1_{0,s}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)_s$, $2<q<\frac{2n}{n-2}$.

Ora, per un noto teorema di Berger e Scechter l'immersione dell'intero spazio $H^1_0(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$, $2<q<\frac{2n}{n-2}$, è compatto se Ω è *sottile all'infinito*, nel senso sequente

(3.4) $$\int_{\Omega\cap B(x,1)} dy \to 0 \qquad \text{per } x \to \infty$$

Il precedente Teorema 3.1 continua quindi a valere se si suppone $\nu<0$ e alle precedenti ipotesi su Ω si sostituisce la (3.4).

4. TEOREMI DI ESISTENZA NEL CASO NON AUTONOMO

Il teorema 2.4 di [5] assicura che la moltiplicazione per una funzione hölderiana q tale che

$$\int_{\Omega\cap B(x,1)} |q(y)|^q dy \to 0 \qquad \text{per } x\to\infty,$$

è un operatore compatto da $H^1_0(\Omega)$ ad $L^q(\Omega)$, $2<q<\frac{2n}{n-2}$. Utilizzando questo risultato si può provare un teorema di esistenza (per aperti non limitati arbitrari) del problema non autonomo

(4.1) $$\begin{cases} -\Delta u = -u + g(x,y) & \text{in } \Omega, \\ u=0 & \text{su } \partial\Omega \ , \\ u>0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

richiedendo alla funzione g di soddisfare ipotesi del tipo (H.2) e (H.3) (uni-

formemente in x) e di verificare inoltre una stima del tipo seguente

$$(4.2) \qquad |g(x,y)| \leq q(x)|u|^{\ell} \quad , \; 2<\ell< \frac{n+2}{n-2}$$

con $q \geq 0$ e tale che

$$(4.3) \qquad \int_{\Omega\cap B(x,1)} |q(x)|^{\ell+1} dx \to 0 \quad \text{per} \quad x \to \infty$$

Questa idea è stata utilizzata da Noussair e Swanson in [20]. In questo lavoro viene studiato il problema

$$(4.4) \qquad \begin{cases} Lu = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 \;\; \text{su } \partial\Omega, & u > 0 \;\; \text{in } \Omega \end{cases}$$

dove L è un operatore uniformemente ellittico in forma di divergenza con coefficienti di classe $C^{1+\alpha}$.

L'aperto Ω viene approssimato mediante una successione di aperti limitati (Ω_p); per ogni fissato p si determina una soluzione variazionale $u_p \in H^1_o(\Omega_p)$ del problema

$$\begin{cases} Lu = f(x,y) \;\; \text{in } \Omega p \\ u = 0 \;\; \text{su } \partial\Omega_p, \;\; u>0 \;\; \text{in } \Omega_p. \end{cases}$$

Si prolunga u_p su Ω ponendolo uguale a zero su $\Omega\backslash\Omega_p$. Si ottiene così una successione (u_p) in $H^1_o(\Omega)$ *limitata* in $H'_o(\Omega)$; da questa si estrae una sottosuccessione debolmente convergente ad una soluzione u di (4.4). Una condizione del tipo della (4.3) permette di provare che $u \neq 0$.

5. UN METODO VARIAZIONALE-MONOTONO

Problemi al contorno per equazioni di Poisson semilineari in aperti cilindrici sono stati studiati anche da Amick e Toland [2], Stuart [23] Bongers, Heinz e Küpper [6], Burton [7]. Vogliamo ricordare in particolare questo ultimo lavoro in quanto in esso viene utilizzato per la prima volta (nel caso di aperti non limitati) una versione del Teorema del passo di montagna che consente di trovare punti critici di funzionali contenuti in assegnati *coni-convessi*.

Questa generalizzazione del Teorema di Ambrosetti e Rabinowitz si deve sostanzialmente a Hofer [14], ma viene formulata in modo esplicito soltanto nel lavoro di Burton.

Teorema 5.1. ([7], pag. 523). Sia $G(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - F(u)$ un funzionale reale di classe C^1 su di uno spazio di Hilbert H e sia C un cono convesso e chiuso di H invariante rispetto a F'. Siano poi u_0 e $u_1 \in C$ tali che

$$G(u) \geq \alpha \quad \forall u \in C: \ \|u-u_0\| = \rho \quad (\alpha,\rho>0 \quad \text{opportuni})$$

$$G(u_0), \quad G(u_1) < \alpha$$

Allora, se G/C verifica la condizione di Palais-Smale, esiste in C un punto critico di livello $c \geq \alpha$ (e quindi non banale).

Questo risultato si basa sulla costruzione data da Hofer di deformazioni omotopiche che lasciano invariato il cono C.

Burton utilizza il Teorema 5.1 per studiare problemi al contorno analoghi a quelli considerati nel § 3 prendendo come H lo spazio $H^1_0(\Omega)$ e come C coni di funzioni non negative con adeguate proprietà di simmetria.

6. CONCENTRAZIONE DI COMPATTEZZA

In questo paragrafo vogliamo descrivere il metodo di concentrazione della compattezza, introdotto da P.L. Lions [18], per lo studio di problemi ellittici semilineari su tutto R^n. Ci limiteremo a considerare il problema seguente:

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} -\sum\limits_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = -u + u|u|^{p-2} \\ u \quad H^1(R^n) \qquad , 2 < p < \frac{n+2}{n-2} \end{cases}$$

dove i coefficienti a_{ij} sono continui e limitati e

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_o \ |\xi|^2, \quad \forall x \in R^n, \quad \forall \xi \in R^n$$

($m_o>0$). Nessuno dei metodi descritti in precedenza è applicabile a (6.1).

Supponiamo

$$a_{ij}(x) \to \bar{a}_{ij} \quad \text{per } x \to \infty \, , \qquad i,j = 1,\dots,n$$

e

$$\text{(6.2)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} (\bar{a}_{ij} - a_{ij}(x))\xi_i\xi_j \geq 0 \qquad x \quad R^n, \qquad \xi \quad R^n$$

Supponiamo inoltre che in (6.2) valga il segno di disuguaglianza in senso stretto almeno per qualche $x_o \in R^n$.

Consideriamo ora i problemi di minimizzazione vincolata

$$I_\lambda = \inf\{T(u) \ / \ u\in H^1(R^n), \ \int_{R^n} |u|^p = \lambda\}$$

$$I_\lambda^\infty = \inf\{T^\infty(u) \ / \ u\in H^2(R^n), \ \int_{R^n} |u|^p = \lambda\}$$

dove $\lambda>0$ e

$$T(u) = \int_{R^n} \sum_{i,j} a_{ij}\partial_i u\partial_j u + u^2 ,$$

$$T^\infty(u) = \int_{R^n} \ _{i,j} \ \bar{a}_{ij} \ \partial_i u\partial_j u + u^2.$$

E' facile riconoscere, per l'ipotesi 6.2, che risulta

$$I_\lambda < I_\lambda^\infty \quad \forall\lambda>0.$$

Proveremo che questa disuguaglianza implica l'esistenza del minimo per I_λ. Per il Teorema di Lagrange-Lusternik esistono allora $u\in H'(R^n)$, $u \not\equiv 0$ e $\mu>0$ tali che

$$\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = -u + \mu \ u \ |u|^{p-2}$$

(in senso debole). Ponendo $v = \mu^{-1/(p-2)}u$ si trova poi una soluzione di (6.1).

Proviamo dunque che I_λ ha minimo. Sia (u_k) una successione minimizzante e poniamo $\rho_k = |u_k|^p$.

Allora

$$\rho_k \geq 0 \ \text{ e } \int_{R^n} \rho_k = \lambda \quad \forall k\in N. \tag{6.3}$$

Per il *principio di concentrazione di compattezza* ([18], Lemma I.1) da (ρ_k) si può allora estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con (ρ_k), verificante almeno una delle eventualità seguenti:

(i) esiste $y_k \in R^n$:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists R>0 : \int_{B(y_k,R)} \rho_k > \lambda-\varepsilon$$

(ii) $$\sup_{y \in R^n} \int_{B(y,R)} \rho_k \to 0 \quad \text{per} \quad k\to\infty, \quad R>0$$

(iii) $\exists \alpha \in]0,\lambda[\; : \; \forall \varepsilon>0$ esistono $\sigma_k, \eta_k \in L^1_+(R^n)$:

$$\|\rho_k-(\sigma_k+\eta_k)\|_{L_1} < \varepsilon \quad , \quad \left|\int_{R^n} \eta_k - \alpha\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int_{R^n} \sigma_k - (\lambda-\alpha)\right| < \varepsilon$$

$$\text{dist}\,(\text{supp}\, \sigma_k, \text{supp}\, \eta_k) \to +\infty \quad \text{per} \quad k \to \infty$$

Si riconosce subito che la (ii) non può verificarsi a causa della (6.3). D'altra parte, se si verifica (iii), separando ρ_k e u_k, si ottiene

$$I_\lambda \geq I_\alpha + I^\infty_{\lambda-\alpha} \quad \text{opp} \quad I_\lambda \geq I^\infty_\alpha + I_{\lambda-\alpha}$$

e ciò è assurdo perché

$$I_\lambda = \lambda^{2/p} I_1, \quad I^\infty_\lambda = \lambda^{2/p}\, I^\infty_1 \quad , \quad I_1 < I^\infty_1 \, , \quad \frac{2}{p} < 1.$$

Deve quindi verificarsi la (i). Se (y_k) è limitata, si ricava subito che

$$\int_{R^n} |u_k|^p \to \int_{R^n} |u|^p$$

e, quindi, u è un punto minimo per I_λ.

D'altra parte, se fosse $y_k \to \infty$ si avrebbe, per l'ipotesi (6.2), $I_\lambda \geq I_\lambda^\infty$. Questo è assurdo in quanto $I_\lambda < I_\lambda^\infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. AMANN, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problem in ordered Banach spaces, SIAM Rew. 18 (1976).

[2] C.J. AMICK-J.F. TOLAND, Non linear elliptic eigenvalue problems on a infinite strip-global theory of bifurcation and asymptotic bifurcation, Math. Ann. 262 (1983).

[3] F.V. ATKINSON-L.A. PELETIER, Ground states of $-\Delta u=f(u)$ and the Emden-Fowler equation. Arch. Rat. Mec. Anal. 93 (1986).

[4] H. BERESTYCKI-P.L. LIONS, Existence of solutions for non linear scalar field equations, Arch. Rat. Mec. Anal. 82 (1983).

[5] M.S. BERGER-L. SCHECHTER, Embedding theorems and quasi-linear elliptic boundary value problems for unbounded domains,Trans. AMS, 172 (1972).

[6] A. BONGER-H.P. HEINZ, T. KÜPPER, Existence and bifurcation theorems for nonlinear elliptic eigenvalue problems on unbounded domains,J. Diff. Eq. 47 (1983).

[7] G.R. BURTON, Semilinear elliptic equations on unbounded domains, Math. Z. 190 (1985).

[8] S. COLEMAN-V. GLEZER-A. MARTIN, Action minima among solutions to a class of euclidean scalar field equations, Comm. Math. Phys. 58 (1978).

[9] M.J. ESTEBAN, Non linear elliptic problems in strip-like domains,symmetry of positive vortex rings, Non linear Anal. 7 (1983).

[10] M.J. ESTEBAN-P.L. LIONS, Existence and non-existence results for semilinear elliptic problem in unbounded domains,Proc. Royal Soc. Edimburgh 93 (1982).

[11] M.J. ESTEBAN-P.L. LIONS, A compactness Lemma, Nonlinear Analysis 7 (1983).

[12] N. GAROFALO-F.H. LIN, Monotonicity properties of variational integrals, Ap weights and unique continuation, Indiana Univ. Math. J. 35 (1986).

[13] X. GARAIZAR, Quelques résultats d'existence pour les equations elliptiques semi-linéaires, CRAS 300, n. 20 (1986).

[14] H. HOFER, Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces, Math. Ann. 261 (1982).

[15] E. LANCONELLI, Seminario di Analisi Matematica, Dip. di Mat. di Bologna, IX (1983-84).

[16] P.L. LIONS, Symétrie et compacité dans les epaces de Sobolev, J. Funct. Anal. 49 (1982).

[17] P.L. LIONS, On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equation, SIAM Rew. 24 (1982).

[18] P.L. LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, I, II Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse nonlineaire, 1 (1984).

[19] L. NIRENBERG, Variational and topological methods in non-linear problems, Bull. AMS 4 (1981).

[20] E.S. NOUSSAIR-C.A. SWANSON, Positive solutions of semilinear elliptic problems in unbounded domains, J. Diff. Equations 57 (1985).

[21] K. SCHMITT, Boundary value problems for quasilinear second order elliptic equations, Non-linear Analysis 2 (1978).

[22] W.A. STRAUSS, Existence of solitary wawes in higher dimensions, Comm. Math. Phys. 55 (1977).

[23] C.A. STUART, A variational approach to bifunction in L^p on unbounded symmetrical domain, Math. Ann. 263 (1983).